Wstęp do programowania w naukach przyrodniczych

Zadania opracował: dr Dominik Gront[1]

Część I
Zadania z programowania

1 Proste zadania

1.1 Suma szeregu

Napisz program obliczający 30 pierwszych wyrazów szeregu:

(a)

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$$

(b)

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$$

(c)

$$1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + (-1)^n\frac{1}{n!}$$

(d)

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \frac{1}{4\cdot 5\cdot 6} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}$$

(e)

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

(f)

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \ldots$$

(g)

$$1 + x\ln a + \frac{(x\ln a)^2}{2!} + \frac{(x\ln a)^3}{3!} + \frac{(x\ln a)^4}{4!} + \ldots + \frac{(x\ln a)^n}{n!}$$

(h)

$$\frac{(x-1)}{x} + \frac{1}{2}\frac{(x-1)^2}{x^2} + \frac{1}{3}\frac{(x-1)^3}{x^3} + \ldots + \frac{1}{n}\frac{(x-1)^n}{x^n}$$

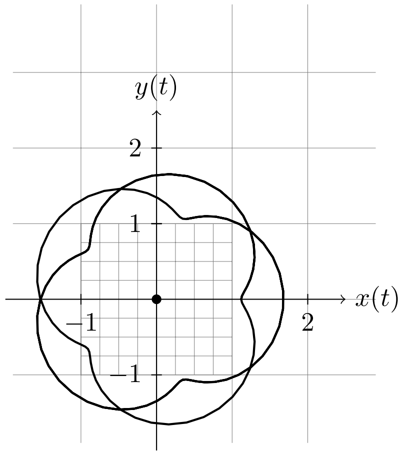
[1]dgront@chem.uw.edu.pl

1.2 Epitrochoida

Napisz program, tablicujący punkty leżące na epitrochoidzie. Krzywa ta zadana jest następującym równaniem parametrycznym:

$$\begin{cases} x &= (A+a)\cos(\phi) - \lambda a \cos(\frac{A+a}{a}\phi) \\ y &= (A+a)\sin(\phi) - \lambda a \sin(\frac{A+a}{a}\phi) \end{cases} \quad (1)$$

Wielkości `A`, `a`, oraz λ to dowolne parametry a ϕ to zmienna niezależna. Program powinien drukować trzy kolumny liczb: ϕ x y, gdzie ϕ zmienia się od 0.0 do 10.0 co 0.01 a x i y policzone są wg powyższych wzorów. Przykładowe wartości parametrów: $A = 1.0$, $a = 0.4$, $\lambda = 1.4$.



$$\begin{cases} x &= (A+a)\cos(\phi) - \lambda a \cos(\frac{A+a}{a}\phi) \\ y &= (A+a)\sin(\phi) - \lambda a \sin(\frac{A+a}{a}\phi) \end{cases}$$

1.3 Schemat Hornera

Naiwna implementacja obliczania wartości wielomianu:

$$W(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$$

dla zadanej wartości x wymaga $n(n+1)/2$ mnożeń oraz n dodawań, gdzie n to stopień wielomianu. Stosując schemat Hornera, wykonamy jedynie n mnożeń oraz n dodawań, wystarczy jedynie nieco przekształcić wzór na wielomian:

$$W(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \ldots + x(a_{n-1} + x a_n)\ldots))$$

(a) Napisz program, który dla zadanego x oblicza wartość dystrybuanty rozkładu normalnego $\mathcal{N}(0,1)$, którą można zdefiniować w oparci o tzw *funkcję błędu* erf:

$$F_X(x) = P(X \geqslant x) = 1 - \frac{1}{2}\,\mathrm{erf}\left(-\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

Funkcja erf co prawda nie ma znanej postaci analitycznej, ale można ją przybliżyć za pomocą wielomianu[2], wyrażonego w postaci Hornera następująco:

$$\begin{aligned} \mathrm{erf}(x) &\approx 1 - (a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5)e^{-x^2} \\ &= 1 - (((((a_5 t + a_4)t) + a_3)t + a_2)t + a_1)te^{-x^2} \end{aligned}$$

gdzie:

$$t = \frac{1}{1 + p * x}$$

a wartości współczynników p oraz a_i wynoszą:

[2]Abramowitz and Stegun, *„Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables"* (dostępna w Internecie) - wzór **7.1.26**

$$
\begin{array}{rclcrcl}
a_1 & = & 0.25482 & \quad & a_2 & = & -0.28449 \\
a_3 & = & 1.42141 & & a_4 & = & -1.45315 \\
a_5 & = & 1.06140 & & p & = & 0.32759
\end{array}
$$

(b) Napisz program, który wczytuje stopień wielomianu n oraz wartości jego $n+1$ współczynników a następnie tablicuje wielomian w zadanym przedziale.

1.4 Model Lotki-Volterry

Stosując podany poniżej układ równań różniczkowych[3] można opisać prosty ekosystem ofiar z (np. zajęcy) i drapieżników w (np. wilków) w funkcji czasu t:

$$
\begin{cases}
\frac{dz}{dt} = (\alpha - \beta w) z \\
\frac{dw}{dt} = (\gamma z - \delta) w
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
z = z + \delta t(\alpha - \beta w) z \\
w = w + \delta t(\gamma z - \delta) w
\end{cases}
$$

gdzie α, β, γ i δ to parametry oznaczające:

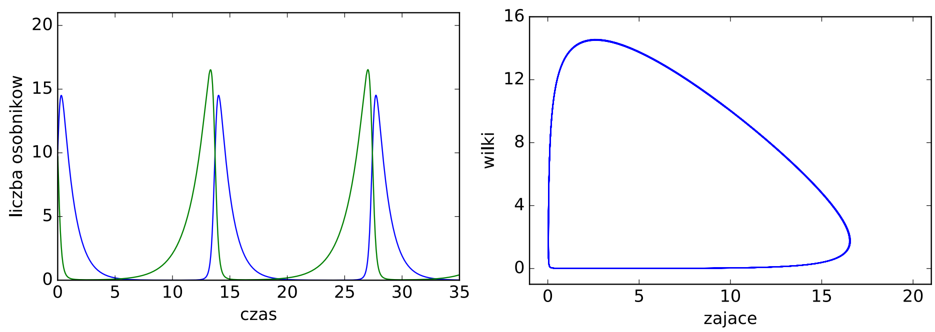
α - współczynnik przyrostu ofiar

β - skuteczność drapieżników

γ - współczynnik przyrostu drapieżników

δ -współczynnik ubywania drapieżników

Zaimplementuj układ równań różnicowych (dyskretnych) podanych po prawej stronie i narysuj wykres liczby zajęcy oraz wilków w zależności od czasu (jak poniżej po lewej) a także wykres punktów (z, w) dla różnych t (czyli tzw. wykres fazowy - jak poniżej po prawej).



Orientacyjne wartości parametrów: $\alpha = 0.66$, $\beta = 1.0$, $\gamma = 0.8$, $\delta = 1.0$, $w_0 = 10.0$ $z_0 = 10.0$; krok czasowy $\delta t = 0.0001$
Uwaga: Jeżeli krok czasowy jest zbyt duży, symulacja jest rozbieżna.

[3]opisany niezależnie przez Vito Volterrę oraz Alfreda Lotkę

1.5 Układ równań

Napisz program rozwiązujący układ dwóch równań z podanymi współczynnikami. Program powinien pobierać 6 liczb: $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ i drukować parę liczb x, y będącą rozwiązaniem układu:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y &= c_1 \\ a_2 x + b_2 y &= c_2 \end{cases} \tag{2}$$

o ile takie rozwiązanie istnieje. W przeciwnym przypadku powinien wypisywać odpowiedni komunikat.

1.6 Generator liczb losowych

Jednen z prostszych sposobów generowania liczb (pseudo)losowych[4] z rozkładu płaskiego to obliczanie reszty z dzielenia (operator *modulo*). Generator taki nazywa się liniowym (Linear Congruential Generators - LCG) i definiuje się następująco:

$$x_{i+1} = (ax_i + c) \bmod m \tag{3}$$

gdzie x_i to i-ta liczba pseudolosowa, a - mnożnik, c - przyrost, m - moduł. Napisz program, generujący 30 liczb pseudolosowych, korzystając z powyższego wzoru. Przyjmij następujące wartości parametrów:

a) $m = 233280\, a = 9301\, c = 49297\, x \in [0...233279]$

b) $m = 714025\, a = 4096\, c = 150889\, x \in [0...714024]$

Wartość pierwszej liczby losowej (konieczna do wygenerowania kolejnej wartości) może być dowolną liczbą mniejszą od stałej m. Opisany tu generator zwraca liczby całkowite nieujemne. Aby uzyskać generator liczb rzeczywistych z przedziału $[0, 1)$, należy generowane wartości podzielić przez m.

1.7 Proste statystyki

Wygeneruj 1000 pseudolosowych liczb rzeczywistych (np. wykorzystując generator opisany w zadaniu 1.6) z przedziału [0...1). Oblicz wartość średnią i odchylenie standardowe. Znajdź też wartość najmniejszą i największą.

1.8 Losowe punkty na kole

(a) Wylosuj 10 000 punktów na płaszczyźnie tak, że zarówno współrzędna x jak i y każdego z punktów pochodzi z przedziału $[-1, 1]$. Wydrukuj współrzędne tylko tych punktów, które zawierają się w okręgu o promieniu $r_0 = 1.0$.

[4]Przy ustalonych warunkach początkowych, np. stałe x_0, a, c oraz m we wzorze 3 wynik "losowania" jest zawsze taki sam, dlatego liczb tych nie można nazwać losowymi. Jednakże kolejno generowane liczby zachowują podstawowe właściwości liczb losowych

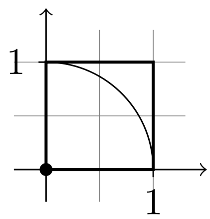
(b) Wylosuj współrzędne radialne (r, ϕ) punktów leżących na kole o promieniu $r_0 = 1.0$. Następnie przelicz te współrzędne na kartezjańskie korzystając z zależności:

$$\begin{cases} x &= r\cos\phi \\ y &= r\sin\phi \end{cases} \tag{4}$$

Porównaj wykresy punktów wylosowanych wg poleceń **(a)** i **(b)** i porównaj je.

1.9 Wyznaczanie wartości π metodą Monte Carlo

Metoda Monte Carlo umożliwia łatwe policzenie dowolnej całki, np. pola figury. Zauważ, że pole ¼ okręgu o promieniu $r = 1.0$ wynosi $\frac{\pi}{4}$. Losując punkty z kwadratu o boku 1.0 (czyli o współrzędnych x oraz $y \in [-1, 1]$) możemy trafić wewnątrz wycinka koła z prawdopodobieństwem równym tej wartości pola (czyli $\frac{\pi}{4}$).



Wylosuj N punktów, policz ile z nich trafiło do wnętrza koła i oblicz na tej podstawie wartość liczby π. Oszacuj w ten sposób π dla $N = 100$, 1 000, 10 000 oraz 100 000.

1.10 Zmienna losowa z rozkładu normalnego

Losowanie z rozkładu normalnego zrealizować można jako wielokrotne losowanie z rozkładu jednostajnego[5]. Aby policzyć **jedną** wartość zmiennej losowej x_N z rozkładu $N(0.0, 1.0)$:

- wylosuj 12 liczb z rozkładu jednostajnego[6] : $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{12} \in [0.0, 1.0)$
- policz ich sumę $s = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{12}$
- $x_N = \frac{s-6}{12}$

Wydrukuj na ekranie takich 30 liczb losowych.

1.11 Losowanie z rozkładu normalnego, transformacja Boxa-Mullera i rozkład Maxwella

Inna metoda na losowanie z rozkładu normalnego polega na wylosowaniu dwóch niezależnych liczb losowych z rozkładu jednostajnego $x_1, x_2 \in [0.0, 1.0)$. Następnie stosuje się następującą transformację:

$$\begin{cases} n_1 &= r\sqrt{-2\log x_1}\cos(2\pi x_2) \\ n_2 &= \sqrt{-2\log x_1}\sin(2\pi x_2) \end{cases} \tag{5}$$

[5]Problem ten jest doskonałym przykładem na działanie Centralnego Twierdzenia Granicznego. Nie jest to jednak najlepszy generator liczb losowych $\mathcal{N}(0, 1)$

[6]im więcej liczb losowych uśrednimy, tym bardziej zbliżony do normalnego bedzie nasz rozkład. 12 to wystarczająco dobre przybliżenie.

w wyniku której otrzymuje się **dwie** losowo niezależne liczby n_1, n_2 z rozkładu $\mathcal{N}(0,1)$, a więc o zerowej wartości oczekiwanej i jednostkowej wariancji. Aby zmienić parametry rozkładu na inne, np wartość czekiwaną na μ a wariancję na σ należy pomnożyć wynik losowania przez σ i dodać μ, tzn:

$$\mathcal{N}(\mu,\sigma) = \sigma\mathcal{N}(0,1) + \mu$$

Zgodnie z rozkładem Maxwella, każda składowa (x, y albo z) wektora prędkości $\vec{v}$ jest zmienną losową z rozkładu normalnego o zerowej wartości oczekiwanej i o wariancji $\sqrt{\frac{k_B T}{m}}$, gdzie m to masa cząsteczki, T to temperatura w Kelvinach a k_B - stała Boltzmanna. Wylosuj 10 000 wektorów prędkości dla cząsteczki azotu N_2 w temperaturze 300K. Oblicz średnią długość tych wektorów, a więc średnią wartość prędkości cząsteczki azotu, korzystając ze wzoru:

$$\bar{v} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \sqrt{v_{x_i} * v_{x_i} + v_{y_i} * v_{y_i} + v_{z_i} * v_{z_i}}$$

1.12 Równanie kwadratowe

Program powinien pobierać trzy liczby: a, b, c i znajdować pierwiastki równania kwadratowego w postaci:

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{6}$$

Jeżeli wartość wyznacznika równania kwadratowego jest ujemna (tzn. $\Delta < 0$), program powinien wypisać odpowiedni komunikat.

1.13 Tablicowanie wartości funkcji dwóch zmiennych

Napisz program, drukujący trzy kolumny liczb: x, y oraz wartości funkcji:

$$f(x,y) = \sin(x+y)\frac{x}{x^2+1} \tag{7}$$

Wartości zmiennej x powinny zmieniać się od -2 do 2 co 0.1 a wartości zmiennej y powinny zmieniać się od -5 do 5 co 0.1.

1.14 Tablicowanie pochodnej funkcji

Wartość pochodną dowolnej funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 można oszacować wg poniższego wzoru:

$$f'(x_0) \sim \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$$

Napisz program, drukujący trzy kolumny liczb: x, $f(x)$ oraz pochodnej $f'(x)$ dla kilku prostych funkcji np $\sin(x)$ czy $\arctan(x)$.

1.15 Rysunki w terminalu tekstowym

Napisz program, wypisujący w terminalu poniższy kształt:

(a)
```
#
##
###
####
#####
```

(b)
```
    #
   ###
  #####
 #######
#########
```

(c)
```
      #
     ####
    #######
   ##########
  #############
```

1.16 Liczby pierwsze

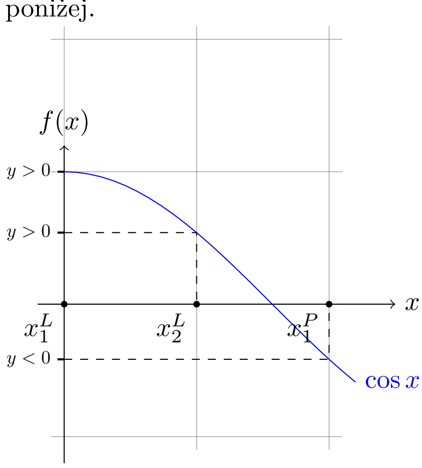
Napisz program znajdujący liczby pierwsze. Dla każdej sprawdzanej liczby naturalnej n program powinien sprawdzić, czy dzieli się ona bez reszty przez wszystkie liczby od 2 do $n-1$[7]. *Wariant trudniejszy.* Program powinien zapamiętywać w tablicy już znalezione liczby pierwsze i sprawdzać podzielność tylko przez nie.

1.17 Metoda połowienia przedziału

Napisz program, który znajduje miejsce zerowe zadanej funkcji w określonym przedziale, np. $\cos(x)$ gdzie $x \in [0.0, 2.0]$. Program powinien wykonać zadaną liczbę (np. 30) iteracji. Krótki opis tej metody podano poniżej.

• Mamy daną funkcję $f(x)$ (tu: $\cos(x)$) i dwa punkty: lewy ($x_1^L = 0.0$) i prawy ($x_1^P = 2.0$). Musi być spełniony warunek: $f(x^L) \times f(x^P) < 0$

• W każdym i-tym kroku algorytmu wybieramy nowy punkt x_{i+1}^N leżący pośrodku punktu prawego i lewego. W tym przykładzie nowy punkt $x_2 = 1.0$ leży pomiędzy $x_1^L = 0.0$ i $x_1^P = 2.0$. Następnie wybieramy jedną z trzech możliwości:



- jeżeli $f(x_{i+1}^N) \times f(x_i^P) = 0$ to znaleziono miejsce zerowe w punkcie x_{i+1}^N.
- jeżeli $f(x_i^L) \times f(x_{i+1}^N) < 0$ to oznacza, że miejsce zerowe leży gdzieś pomiędzy punktem lewym a nowym. Wtedy x_i^L pozostaje punktem lewym w kolejnej iteracji jako x_{i+1}^l a x_{i+1}^N staje się nowym punktem prawym (x_{i+1}^P).
- jeżeli $f(x_{i+1}^N) \times f(x_i^P) < 0$ to wtedy x_{i+1}^N staje się punktem lewym (x_{i+1}^L) a x_i^P pozostaje punktem prawym w kolejnej iteracji jako x_{i+1}^P.

W tym przykładzie $\cos(1.0) \times \cos(2.0) < 0$ co oznacza, że miejsce zerowe leży pomiędzy punktem nowym a prawym. Punkt prawy zostaje jako prawy w iteracji nr 2, a za punkt lewy obierany jest x_1^N i połowienie przedziału powtarza się.

[7] tak na prawdę wystarczy sprawdzić podzielność przez k takie, że $2 \leqslant k \leqslant \sqrt{n}$, prawda?

1.18 Równania nieliniowe - metoda Newtona

Inną metodą znajdowania miejsc zerowych funkcji (czyli rozwiązywania równań postaci $f(x) = 0$) jest metoda Newtona. Wymagana jest w tym przypadku znajomość pochodnej $f'(x)$ oraz punkt startowy x_0 niezbyt odległy od poszukiwanego miejsca zerowego. Miejsce zerowe znajdujemy stosując iterację:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Rozwiąż metodą Newtona następujące równania:

(a) $x^2/4 + \sin(x) = 0$ przy $x_0 = 1.6$

(b) $\ln x - e^{-3x} = 0$ przy $x_0 = 2$

2 Zadania trudniejsze

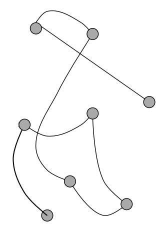
2.1 Epitrochoida - wariacje na temat

Zmodyfikuj program 1.2 tak, aby parametry A oraz a były funkcjami parametru ϕ, np:

$$\begin{aligned} A(\phi) &= A(1.0 + 0.25\sin(\phi)) \\ a(\phi) &= a(1.0 + 0.5 \cdot |\sin(\phi)|) \end{aligned} \tag{8}$$

W programie zadeklaruj funkcje dla powyższych równań a wyniki zapisz w tablicy.

2.2 Błądzenie losowe



Pchła startuje z punktu (0.0,0.0) i wykonuje skoki o długości 1.0 w losowym kierunku. Zbadaj, na jaką odległość od punktu startu oddali się pchła po N skokach.

Wersja nieco trudniejsza ale ciekawsza: długość skoku pchły jest również losowa, np $\in (0...1]$

2.3 Szyfr Cezara (podstawieniowy)

Jednym z najprostszych sposobów szyfrowania wiadomości jest szyfr Cezara[8]. Polega on na zastępowaniu każdej z liter alfabetu inną, zawsze taką samą literą.

Jeżeli na przykład szyfr zdefiniujemy następująco: $\dfrac{\texttt{ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ}}{\texttt{DEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZABC}}$

to każda litera ”A”, która pojawi się w tekście jawnym, w szyfrogramie zakodowana zostanie jako D itd. Ogólnie rzecz biorąc, i-ta litera alfabetu kodowana jest jako litera $(i + 3)$-cia

Napisz program kodujący zadany tekst wg. podanego powyżej sposobu. Następnie zmodyfikuj swój kod tak, aby przesunięcie szyfru było parametrem programu.

2.4 Enigma w najprostszej postaci

Szyfr podstawieniowy jest bardzo prosty do złamania. Mocniejszy szyfr można uzyskać, zmieniając cyklicznie kod. Zmiana taka polega na przesunięciu ciągu znaków o jedną literę, np.

[8]Znany już w czasach starożytnych. Juliusz Cezar szyfrując wiadomości używał przesunięcia = 3, Oktawian August zaś przesunięcia = 1

Klucz szyfru - postać wyjściowa	Postać po jednym przesunięciu
`ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ`	`ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ`
`EKMFLGDQVZNTOWYHXUSPAIBRCJ`	`JEKMFLGDQVZNTOWYHXUSPAIBRC`

Postać po dwóch przesunięciach	Postać po trzech przesunięciach
`ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ`	`ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ`
`CJEKMFLGDQVZNTOWYHXUSPAIBR`	`RCJEKMFLGDQVZNTOWYHXUSPAIB`

Napisz program kodujący zadany tekst wg. algorytmu podstawiania z uwzględnieniem przesunięć. Zastosuj podany w tym zadaniu klucz (odpowiadającego jednemu z trzech wirników zamontowanych w Enigmie). Przesunięcie klucza odbywa się co k kodowanych znaków, gdzie k to parametr programu. Gdy $k = 1$, to po każdej zakodowanej literze klucz przesuwany jest o jeden znak w prawo.

2.5 Histogram dla zmiennej losowej z rozkładu normalnego

Napisz funkcję losującą liczby losowe z rozkładu normalnego. Następnie policz kilka tysięcy wartości losowych z tego rozkładu i zrób ich histogram. Przyjmij szerokość klasy histogramu (binu) za rowną 0.1

2.6 Rozkład Maxwella

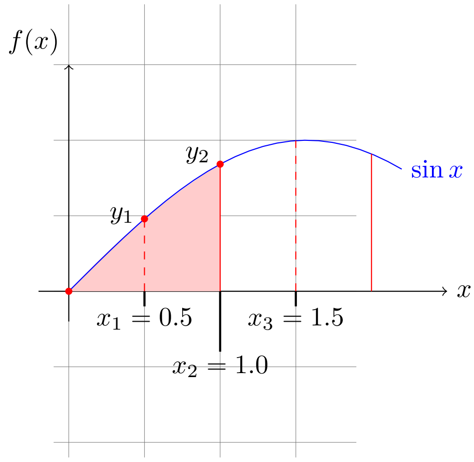
Rozwiąż zadanie 1.11. Następnie zmodyfikuj program tak, aby wyznaczał histogram prędkości cząsteczek o zadanej masie dla danej temperatury. Znajdź najbardziej prawdopodobną prędkość cząsteczki azotu w temperaturze 300K.

2.7 Całkowanie metodą Simpsona

Zadanie polega na numerycznym całkowaniu dowolnej funkcji (np. $\sin(x)$) wg. wzoru Simpsona:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4 \cdot y_1 + 2 \cdot y_2 + 4 \cdot y_3 + 2 \cdot y_4 + \ldots + 2 \cdot y_{n-2} + 4 \cdot y_{n-1} + y_n) \quad (9)$$

gdzie $y_i = f(x_i)$ a kolejne punkty x generowane są jako $x_i = x_0 + i \cdot h$ a h to odstęp między punktami. Wzór powyższy przybliża całkowaną funkcję odcinkami parabol przechodzącymi przez zadane punkty. Na rysunku obok czeronym kolorem zaznaczono punkty (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), odcinek paraboli przechodzący przez nie oraz pole pod parabolą. Suma pól wszystkich parabol jest przybliżeniem szukanej całki. Liczba punktów n musi być parzysta.



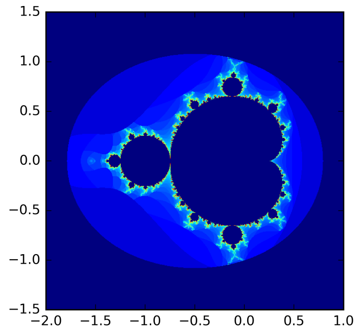
W tym celu policz wartości funkcji $\sin(x)$ dla $x \in [0.0, \pi]$ zmieniającego się co 0.01.

2.8 Zbiór Mandelbrota

Zbiór Mandelbrota tworzą punkty zdefiniowane na płaszczyźnie zespolonej takie, że poniższe równanie rekurencyjne[9] nie dąży do nieskończoności:

$$\begin{cases} z_0 & = & 0 \\ z_{n+1} & = & z_n^2 + c \end{cases} \tag{10}$$

Zadeklaruj w programie dwuwymiarową tablicę `T` o rozmiarze 600×600. Każdy element tablicy `T[k][l]` odpowiadał będzie liczbie zespolonej $c_{kl} = (-2 + k * 0.005, (-1.5 + l * 0.005)\hat{i})$. Następnie dla każdego elementu `T[k][l]` oblicz pierwsze $n_{max} = 100$ wyrazów szeregu i zapisz wartość n, dla którego $|z_n| > 2$.



Przypomnienie: Kwadrat liczby zespolonej $z = a + b\hat{i}$ obliczamy następująco: $z^2 = (a^2 - b^2) + 2ab\hat{i}$

2.9 Wyznaczanie kwantyli na podstawie próby losowej

Kwantylem x_p rzędu p dla danego rozkładu zmiennej losowej P_X nazywamy taką liczbę x, dla której wylosowanie liczby nie większej x z tego rozkładu wynosi p. Np mediana, czyli kwantyl $x_{0.5}$ to taka wartość x, że prawdopodobieństwo wylosowania dowolnej liczby z przedziału $(-\inf, x]$ wynosi 1/2. Kwantyle stopni odpowiadającym dziesiątym częściom prawdopodobieństwa, tzn. $x_{0.1}$, $x_{0.2}$, ..., $\S_{0.9}$ nazywamy decylami, kwantyle odpowiadające setnym częściom prawdopodobieństwa - centylami.

[9]definiujące szereg liczbowy

Kwantyle bardzo łatwo można wyznaczyć mając (dużą) próbę losową z danego rozkładu. Wystarczy wartości losowe posortować, a następnie odczytać z tablicy odpowiedni element. I tak na przykład, aby znaleźć kwantyl $x_{0.2}$ z próby $N = 1\ 000$ wartości losowych, należy tablicę tych wartości posortować a następnie odczytać $N * 0.2 = 200$ element.

Przetestuj generator liczb losowych opisany w zadaniu 1.10. W tym celu wylosuj nim 10 000 wartości i zapisz w tablicy. Wyznacz percentyle metodą opisaną powyżej. Następnie zrób wykres punktów, których odcięte będą "*prawdziwymi*" percentylami rozkładu normalnego a rzędne - percentylami wyznaczonymi w tym zadaniu. "*Prawdziwe*" percentyle rozkładu normalnego łatwo znaleźć w Internecie. Można je też policzyć korzystając z dystrybuanty opisanej w zadaniu 1.3.

2.10 Spirala Ulama

Spirala Ulama (zwana również spiralą liczb pierwszych), przedstawiona po raz pierwszy przez Stanisława Ulama w 1963 roku, skonstruowana jest następująco. Na kwadratowej tablicy $N \times N$ wypisywane są liczby naturalne, zaczynając od 1. Następnie wymazuje się te liczby, które nie są pierwszymi. Przykład podano poniżej:

37	36	35	34	33	32	31	37						31
38	17	16	15	14	13	30		17				13	
39	18	5	4	3	12	29			5		3		29
40	19	6	1	2	11	28		19		1	2	11	
41	20	7	8	9	10	27	41		7				
42	21	22	23	24	25	26				23			
43	44	45	46	47	48	49	43				47		

Napisz program, rysujący na ekranie spiralę Ulama dla zadanego N. Zadbaj o odpowiednie formatowanie wydruku tak, aby każda liczba umieszczona była we właściwej sobie kolumnie.

2.11 Sortowanie bąbelkowe

Wylosuj 1000 liczb i zapisz je w tablicy. Następnie posortuj tą tablicę rosnąco wykorzystując algorytm bąbelkowy